Examen HAVO

2021

tijdvak 2
dinsdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

FORMULEBLAD

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$,
waarin a, b, c en d absolute aantallen zijn.

- als $phi < -0,4$ of $phi > 0,4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0,4 \leq phi < -0,2$ of $0,2 < phi \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0,2 \leq phi \leq 0,2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{\text{cp}}$)
(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{\text{cp}} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{\text{cp}} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{\text{cp}} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\overline{X}_1$ en $\overline{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\overline{X}_1 \geq \overline{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0,4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen[1)] elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

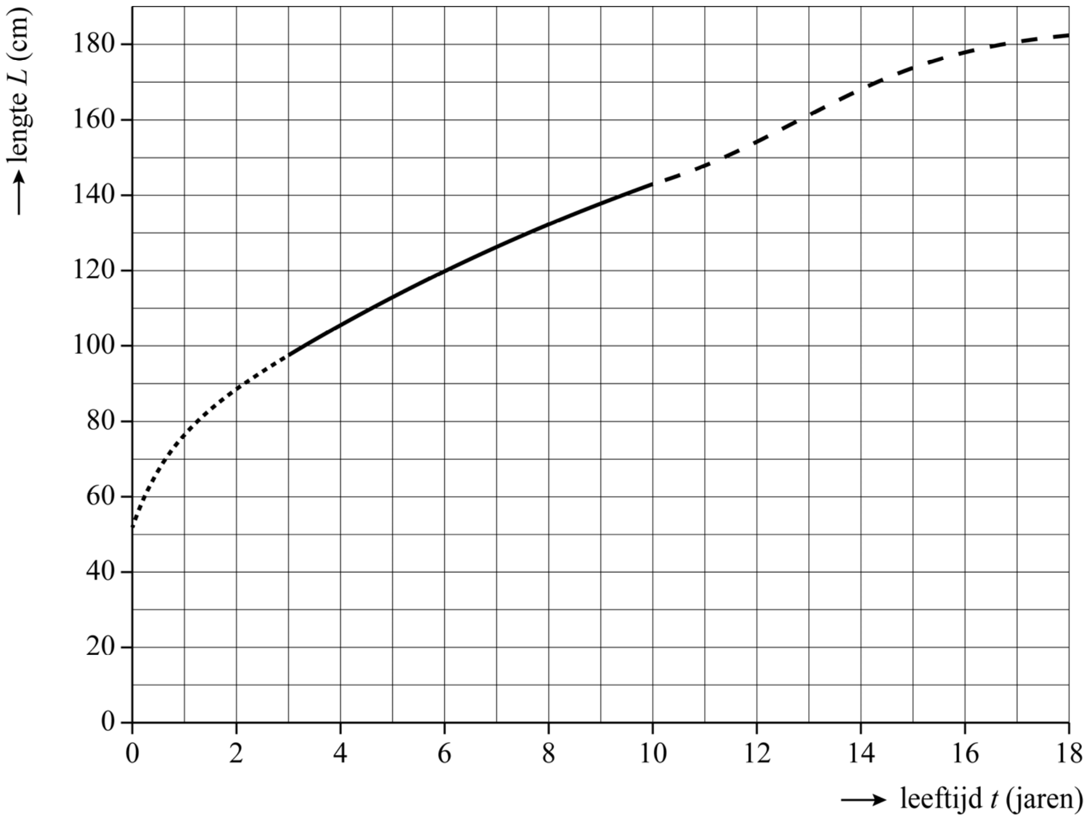
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\overline{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Lichaamslengte

We bekijken een wiskundig model dat het verband geeft tussen de leeftijd van Nederlandse jongens en hun (gemiddelde) lengte op die leeftijd.
Dit model gaat uit van drie fases: de kleutertijd (0-3 jaar), de kindertijd (3-10 jaar) en de puberteit (vanaf 10 jaar). Zie de figuur.

figuur **lengte jongens**



Tijdens de kindertijd neemt de lengte nagenoeg lineair toe. Je kunt dus voor de kindertijd een formule geven waarbij je de lengte L (in centimeter) uitdrukt in de leeftijd t (in jaren).

4p **1** Stel deze formule op. Geef de getallen in je formule in één decimaal.

In de puberteit verloopt de groei niet meer lineair. De lengte van Nederlandse jongens in de puberteit kan worden beschreven met de formule:

$$L_{\text{j}} = \frac{50{,}9}{1 + 1289{,}5 \cdot 0{,}57^{t}} + 134$$

Hierin is t de leeftijd in jaren en L_{j} de lengte in centimeters.

Rond het negentiende levensjaar, aan het eind van de puberteit, is een jongen bijna uitgegroeid. De formule is echter ook te gebruiken voor de jaren na de puberteit.

4p **2** Bereken hoeveel centimeter jongens volgens de formule nog groeien vanaf de dag dat ze 19 jaar worden. Geef je antwoord in één decimaal.

Er is ook een wiskundig model voor de lengte van Nederlandse meisjes in de puberteit:

$$L_{\text{m}} = \frac{48{,}3}{1 + 245{,}4 \cdot 0{,}59^{t}} + 122{,}6$$

Hierin is t de leeftijd in jaren en L_{m} de lengte in centimeters.

Het is bekend dat meisjes in de eerste jaren van de puberteit gemiddeld genomen langer zijn dan jongens. Ergens tussen de tiende en dertiende verjaardag is het verschil in lengte tussen jongens en meisjes maximaal.

3p **3** Bereken dit maximale lengteverschil in centimeters. Geef je antwoord in één decimaal.

Veiligheidsmonitor

Hoe ervaren Nederlanders de leefbaarheid van hun woonomgeving? Voelen zij zich er veilig? Hoe vaak zijn ze slachtoffer van criminaliteit en wat vinden ze van het functioneren van de politie? Op dit soort vragen geeft de Veiligheidsmonitor antwoord. De Veiligheidsmonitor is een enquête onder de Nederlandse bevolking, die jaarlijks wordt afgenomen door middel van een representatieve steekproef. In 2015 waren er 111 000 respondenten.

In tabel 1 staat welk percentage in de steekproef het (helemaal) eens was met bepaalde stellingen.

tabel 1

	(helemaal) eens
In de buurt is het buiten goed verlicht.	76%
In de buurt zijn wegen, paden en pleintjes goed onderhouden.	69%
In de buurt zijn perken, plantsoenen en parken goed onderhouden.	67%
In de buurt zijn goede speelplekken voor kinderen.	62%
In de buurt zijn goede voorzieningen voor jongeren.	26%

Met bovenstaande gegevens kun je het 95%-betrouwbaarheidsinterval berekenen voor de proportie van de populatie die het (helemaal) eens is met de stelling dat er in de buurt goede voorzieningen zijn voor jongeren.

3p **4** Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Geef je antwoord in drie decimalen.

De respondenten hebben een rapportcijfer gegeven voor de leefbaarheid van hun woonomgeving. De resultaten staan in tabel 2, uitgesplitst naar geslacht en naar herkomst. Hierin staan het gemiddelde rapportcijfer dat elke groep heeft gegeven en de bijbehorende marge. Deze marge is gelijk aan $2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, waarin S de standaardafwijking van de gegeven rapportcijfers binnen de betreffende groep is en n de omvang van die groep in de steekproef.

tabel 2

	gemiddelde rapportcijfer	**marge (afgerond)**
geslacht		
man	7,4	0,0
vrouw	7,4	0,0
herkomst		
autochtoon	7,5	0,0
westers allochtoon	7,4	0,0
niet-westers allochtoon	7,0	0,0
gehele steekproef	**7,4**	**0,0**

Doordat alle groepen behoorlijk groot zijn, is de bijbehorende marge telkens heel klein. In tabel 2 zie je dat voor elke groep de marge, afgerond op één decimaal, gelijk is aan 0,0.

Neem aan dat de helft van de respondenten man was.

5p **5** Bereken hoe groot de standaardafwijking van de gegeven rapportcijfers van de groep mannen maximaal was. Geef je antwoord in één decimaal.

Als je kijkt naar de uitsplitsing naar herkomst en je berekent het gemiddelde van de cijfers 7,5 en 7,4 en 7,0 dan kom je uit op 7,3. Dit komt niet overeen met het gemiddelde rapportcijfer van 7,4 van de gehele steekproef.

2p **6** Geef hiervan de oorzaak.

De respondenten gaven ook aan of zij wel of geen sociale overlast ervaren. Denk hierbij bijvoorbeeld aan overlast door dronken mensen op straat, drugsgebruik of rondhangende jongeren. De resultaten zijn in tabel 3 in vijf groepen uitgesplitst naar de mate van stedelijkheid van de woonplaats van de respondenten.

tabel 3

mate van stedelijkheid	**aantal respondenten**	**aantal dat sociale overlast ervaart**
zeer sterk	25 222	4590
sterk	27 581	3751
matig	19 219	1768
weinig	19 496	1267
niet	19 482	1052

We bekijken nu de groep respondenten van wie de woonplaats zeer sterk stedelijk is en de groep respondenten van wie de woonplaats niet stedelijk is.
Tussen deze twee groepen is er verschil in het wel of niet ervaren van sociale overlast.

3p **7** Bereken met behulp van het formuleblad of dit verschil groot, middelmatig of gering is.

Verdubbelingstijd van geld

In plaats van geld sparen, kun je ook geld beleggen. Dit brengt wel een risico met zich mee: het kan niet alleen winst opleveren, maar ook verlies.

Iemand stort eenmalig een bedrag in een beleggingsfonds. We gaan er in deze opgave van uit dat dit bedrag exponentieel groeit. Het percentage waarmee het bedrag jaarlijks groeit is het **rendement**.

3p **8** Bereken de verdubbelingstijd in jaren als het rendement gelijk is aan 1,5%. Geef je antwoord in twee decimalen.

In de tabel staat de verdubbelingstijd V in jaren voor enkele rendementen P in procenten.

tabel

P	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
V	35,00	28,07	23,45	20,15	17,67	15,75	14,21

Het lukt Jan niet om de verdubbelingstijd bij een rendement van 2,9% precies te berekenen. Hij besluit gebruik te maken van lineair interpoleren en de waarden in de tabel. Zo zal hij een benadering van de verdubbelingstijd vinden.

4p **9** Bereken de benadering van de verdubbelingstijd in jaren die hij op deze manier vindt. Geef je antwoord in twee decimalen.

Jans benadering van de verdubbelingstijd bij een rendement van 2,9% komt hoger uit dan de precieze verdubbelingstijd. Ook bij elk ander rendement kom je met lineaire interpolatie hoger uit.

3p **10** Laat dit zien met behulp van een schets.

Er lijkt sprake te zijn van een omgekeerd evenredig verband tussen P en V. Toch is er **niet precies** sprake van een omgekeerd evenredig verband.

2p **11** Toon aan dat er inderdaad niet precies sprake is van een omgekeerd evenredig verband.

In het boek *Mijn vermogen* van de Consumentenbond staat een eenvoudige vuistregel om de verdubbelingstijd bij een gegeven rendement te schatten:

> "Deel het getal 69 door het rendement. De uitkomst is het aantal jaren dat nodig is om het vermogen te verdubbelen."

Het verschil tussen de verdubbelingstijd uit de tabel en de verdubbelingstijd volgens de vuistregel blijkt niet zo heel groot te zijn.

3p **12** Bereken bij een rendement van 3,0% het verschil tussen de verdubbelingstijd uit de tabel en die volgens de vuistregel. Geef je antwoord in gehele maanden.

Met de vuistregel in het kader boven vraag 12 kun je de verdubbelingstijd schatten bij een gegeven rendement. Sommige mensen willen een vuistregel hebben om het omgekeerde te doen: zij willen weten welk rendement nodig is bij een gegeven verdubbelingstijd.

2p **13** Geef een vuistregel in woorden om het rendement te schatten bij een gegeven verdubbelingstijd in jaren.

Online dating met wiskunde

Sommige mensen proberen een nieuwe relatie te vinden door gebruik te maken van een datingsite. Veel datingsites gebruiken wiskundige technieken om te bepalen in hoeverre twee personen bij elkaar passen. Daarvoor moeten de deelnemers vragenlijsten invullen. Hierin geven zij hun wensen aan, verdeeld over verschillende onderwerpen zoals opleidingsniveau, leeftijd en rookgedrag van de partner.

Voor elk van de verschillende onderwerpen wordt een score berekend. De score op een onderwerp noemt men de **aantrekkingskracht** op dit onderwerp. Deze score is minimaal 0 (geen aantrekkingskracht) en maximaal 10 (maximale aantrekkingskracht); het hoeft geen geheel getal te zijn.

Om de aantrekkingskracht op het onderwerp 'leeftijd' te berekenen wordt formule 1 gebruikt voor personen die het liefst een even oude partner hebben:

$$A = 10^{1-c\cdot L^2} \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is A de aantrekkingskracht op het onderwerp 'leeftijd', L het leeftijdsverschil in jaren en c een positief getal dat afhangt van hoe vervelend iemand het vindt als de partner toch wat in leeftijd verschilt.

Elsemieke van 35 jaar heeft het liefst een even oude partner. Voor haar geldt $c = 0{,}02$. Elsemieke heeft de keuze uit twee mogelijke partners: een partner van 32 jaar en een partner van 37 jaar. Je kunt nu voor Elsemieke het verschil berekenen in aantrekkingskracht op het onderwerp 'leeftijd' tussen deze twee mogelijke partners.

3p **14** Bereken dit verschil. Geef je antwoord in één decimaal.

Voor Madeleine, die ook het liefst een partner heeft die even oud is, geldt $c = 0{,}03$, dus

$$A = 10^{1-0{,}03\cdot L^2} \qquad \text{(formule 2)}$$

Naarmate het leeftijdsverschil groter wordt, wordt voor Madeleine de aantrekkingskracht op het onderwerp 'leeftijd' kleiner. Je kunt beredeneren dat formule 2 daarmee in overeenstemming is.

3p **15** Geef deze redenering zonder getallen in te vullen of een schets/tekening van de grafiek van A te maken.

Voor Madeleine is het verband tussen L en A niet exponentieel.

3p **16** Laat dit met berekeningen zien.

Harry heeft zich ingeschreven bij datingsite MatchingMe. Deze site gebruikt de aantrekkingskracht op tien onderwerpen (zoals ‘leeftijd’ en ‘rookgedrag’) om voor elke mogelijke partner één eindscore te berekenen. Hoe hoger de eindscore, hoe aantrekkelijker de persoon in zijn geheel wordt gevonden.

MatchingMe twijfelt tussen twee formules om de eindscore E te berekenen:

$$E = \tfrac{1}{10}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}) \qquad \text{(formule 3)}$$

$$E = (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7 \cdot A_8 \cdot A_9 \cdot A_{10})^{\frac{1}{10}} \qquad \text{(formule 4)}$$

Hierin zijn A_1 tot en met A_{10} de aantrekkingskrachten op de tien onderwerpen.

Harry ziet Bianca op MatchingMe. Haar leeftijd vindt hij perfect, omdat zij even oud is als hij. Maar Bianca rookt en dat vindt hij erg onaantrekkelijk. De aantrekkingskracht op het onderwerp ‘rookgedrag’ is daarom 0.

Bij het gebruik van een van de twee formules zal blijken dat Bianca zeker geen geschikte partner voor Harry is.

3p **17** Bij welke van de twee formules is dat het geval? Licht je antwoord toe met een berekening.

In de tabel zie je hoe voor Harry de aantrekkingskracht van twee andere vrouwen, Lizette en Sarah, op elk van de tien onderwerpen is. Ook zie je de standaardafwijking van de scores van Lizette.

tabel

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	standaard-afwijking
Lizette	1	1	1	1	1	9	9	9	9	9	4
Sarah	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	…

Neem aan dat MatchingMe formule 4 gebruikt om de eindscore E te bepalen.

3p **18** Laat zien dat degene met de kleinste standaardafwijking in het geheel de aantrekkelijkste is voor Harry.

Bevolkingsgroei

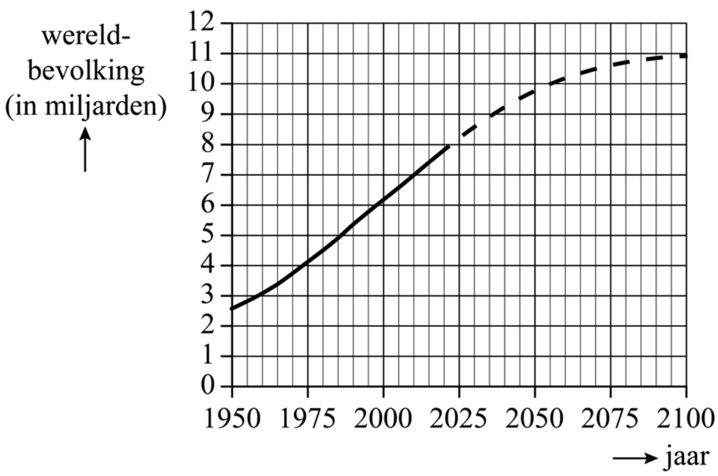
De afgelopen eeuwen is het aantal mensen op aarde sterk toegenomen. Sinds enkele decennia is deze toename aan het afnemen.
Een mogelijke verklaring voor het afnemen van de toename is het feit dat het gemiddelde aantal kinderen per vrouw in de loop der tijd kleiner is geworden. Zo kregen vrouwen in 1965 gedurende hun leven gemiddeld 5,0 kinderen, in 2018 was dat aantal afgenomen tot 2,4 kinderen.

Neem aan dat in de periode 1965-2018 het gemiddelde aantal kinderen per vrouw afnam volgens een exponentieel verband en dat die afname zich daarna op dezelfde wijze voortzet.

4p **19** Bereken het gemiddelde aantal kinderen per vrouw in 2035. Geef je antwoord in één decimaal.

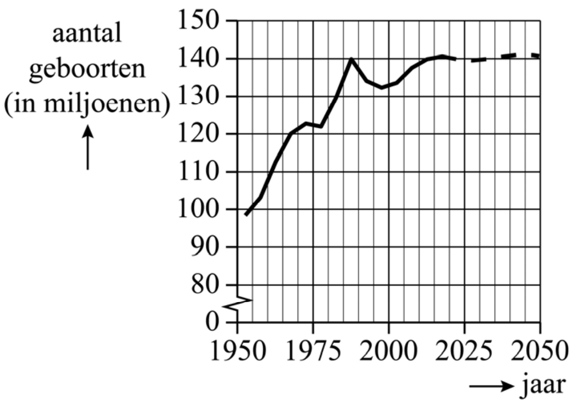
In figuur 1 zie je de groei van de wereldbevolking sinds 1950 en een voorspelling voor de rest van de eenentwintigste eeuw.

figuur 1



In figuur 2 zie je het jaarlijkse aantal geboorten wereldwijd, inclusief een voorspelling tot 2050.

figuur 2



Hoewel de wereldbevolking toeneemt, is het jaarlijks aantal geboorten de afgelopen jaren redelijk stabiel. Het **geboortecijfer**, het aantal geboorten per jaar per 1000 mensen, neemt dus af.

De figuren 1 en 2 staan vergroot op de uitwerkbijlage.

3p **20** Bereken met behulp van de figuren op de uitwerkbijlage hoe groot het geboortecijfer in het jaar 2020 was. Geef je antwoord als een geheel getal.

Het **sterftecijfer** is het aantal overledenen per jaar per 1000 mensen.

De sterke bevolkingsgroei van de afgelopen 100 jaar kan verklaard worden door het feit dat mensen langer zijn gaan leven door verbeterde levensomstandigheden. Hierdoor is het sterftecijfer gedaald, waardoor er minder mensen stierven dan er geboren werden.
Men verwacht echter over een aantal jaren wel weer een lichte toename van het sterftecijfer. In de tabel zie je voor de jaren 2060 en 2080 de verwachte geboortecijfers en sterftecijfers.

tabel

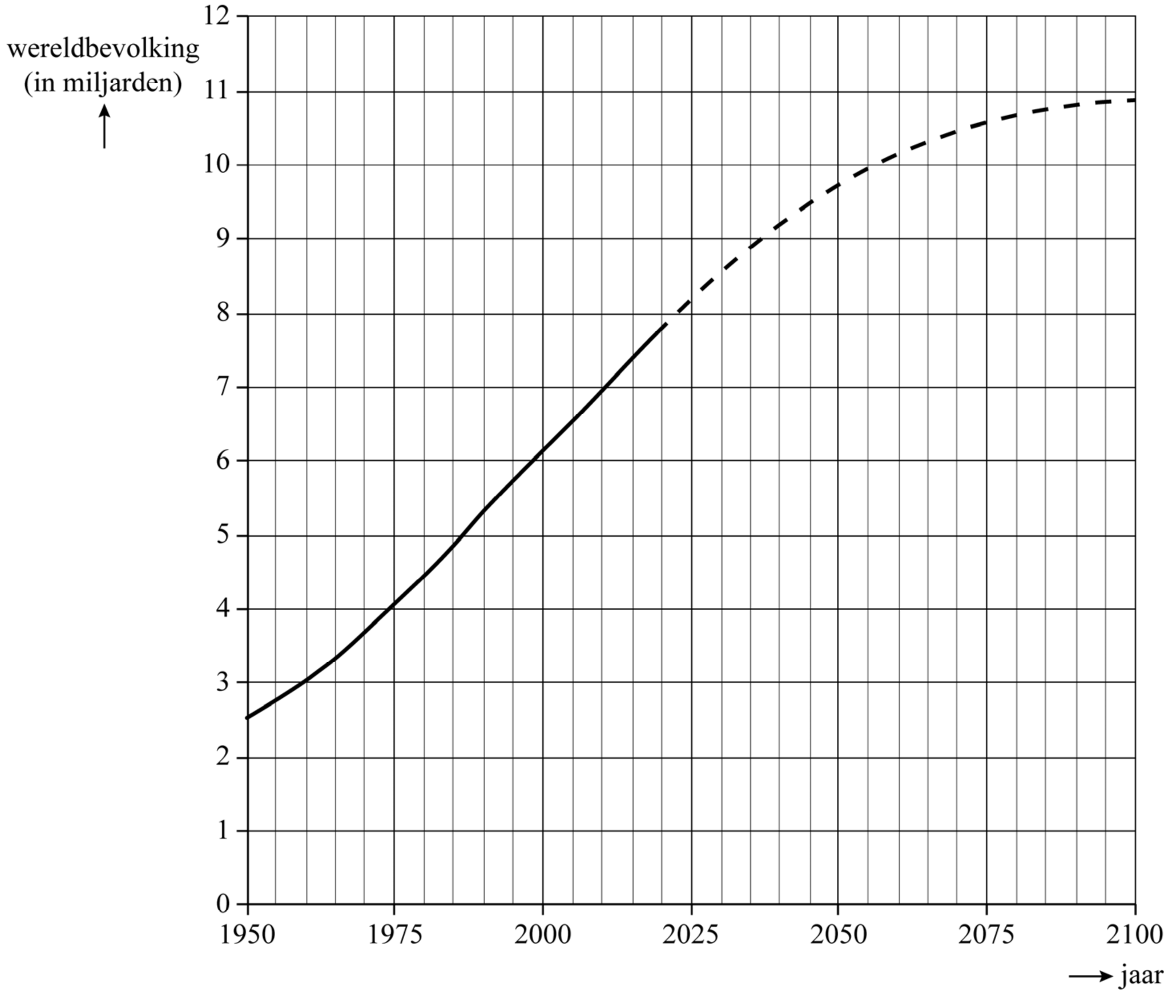
jaar	**2060**	**2080**
geboortecijfer	14,0	12,8
sterftecijfer	9,8	10,6

Neem aan dat het geboortecijfer vanaf 2060 lineair afneemt en het sterftecijfer vanaf 2060 lineair toeneemt.

5p **21** Bereken in welk jaar de bevolkingsgroei dan naar verwachting zal stoppen.

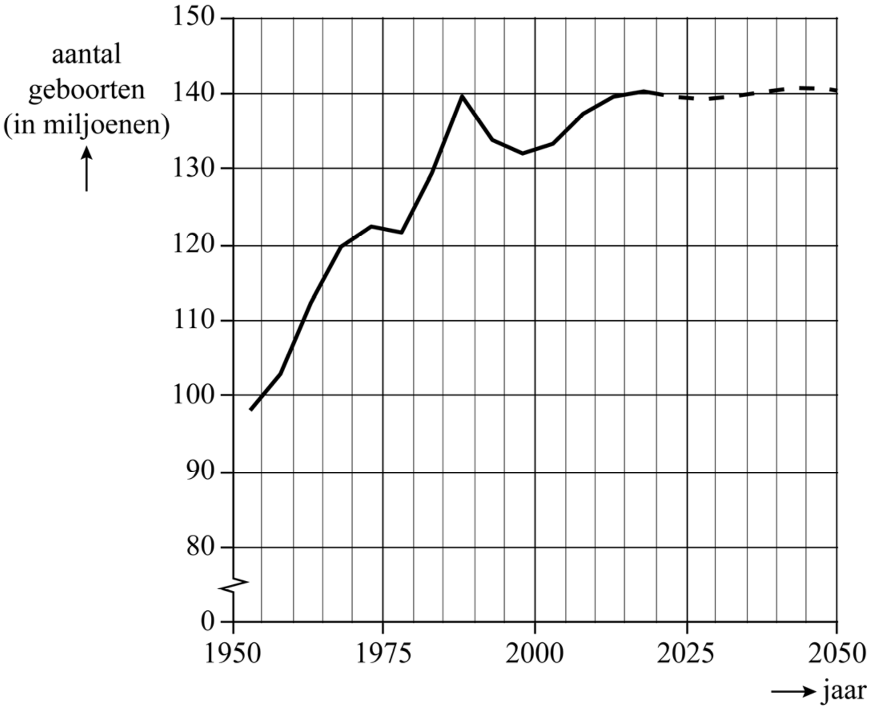
uitwerkbijlage

20



uitwerkbijlage

20



Regenpijpen: dunne of dikke?

Regenwater dat op een dak valt, komt in de dakgoot terecht en daarna in verticale regenpijpen. Zie figuur 1.

figuur 1

Ook bij hevige regenval moet het water goed afgevoerd kunnen worden. Je kunt daarvoor bijvoorbeeld meerdere regenpijpen plaatsen en/of kiezen voor dikkere regenpijpen.

Om te berekenen hoe groot de hoeveelheid regen is die de regenpijpen per dakdeel moeten kunnen afvoeren, gebruikt men de volgende formule:

$$H = 1{,}8 \cdot A \cdot f$$

Hierin is H de hoeveelheid af te voeren regen in liters/minuut,
A de oppervlakte van het dakdeel in m^2 en f een factor die afhangt van de hellingshoek van het dakdeel.

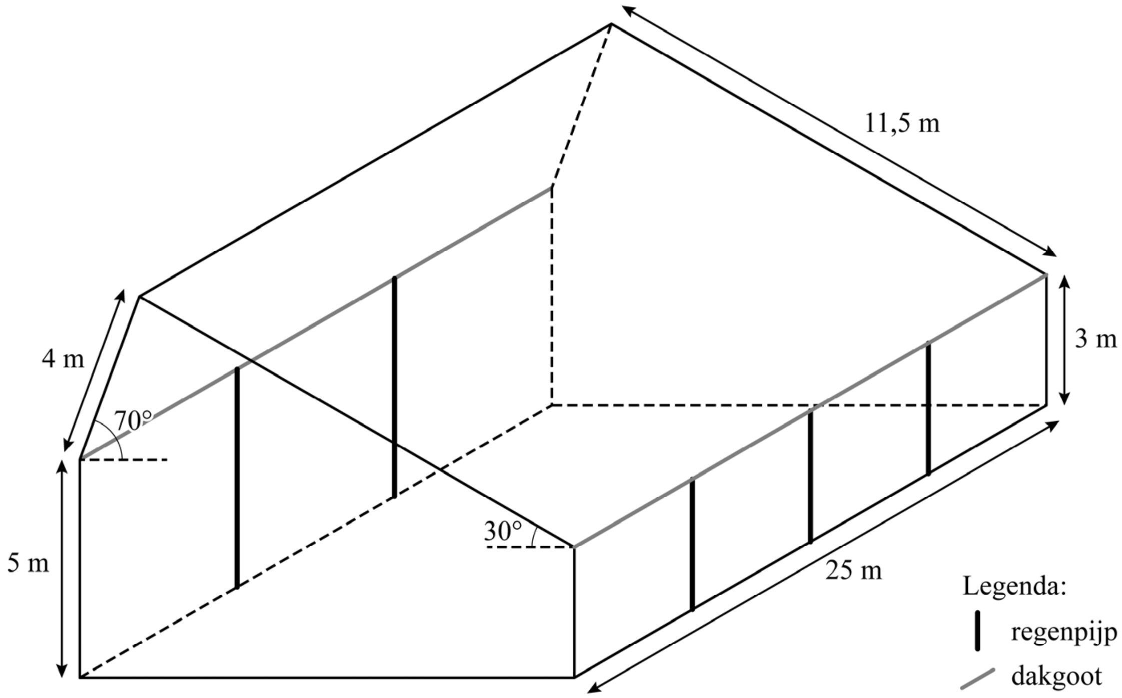
In de tabel staat de factor f voor verschillende hellingshoeken.

tabel

hellingshoek van het dakdeel	0°-45°	46°-60°	61°-85°	86°-90°
factor f	1	0,8	0,6	0,3

Boer Pietersma heeft een schuur gebouwd met afmetingen zoals aangegeven in figuur 2. De twee dakdelen, met hellingshoeken van 70° en 30°, zijn rechthoekig van vorm. De dikke verticale lijnstukken stellen regenpijpen voor, maar het ligt nog niet vast hoeveel regenpijpen er moeten komen. De grijze lijnstukken zijn de dakgoten.

figuur 2   voorbeeld met 2 regenpijpen links en 3 regenpijpen rechts



Pietersma moet kiezen voor ofwel allemaal dunne regenpijpen ofwel allemaal dikke regenpijpen. De dunne pijpen hebben een diameter van 70 mm, de dikke hebben een diameter van 100 mm. Een dunne pijp kost € 9 per meter, een dikke kost € 13 per meter.

Je kunt uitrekenen hoeveel water één regenpijp per minuut kan afvoeren. Deze hoeveelheid water heet de **capaciteit** van de regenpijp. De dikke pijpen hebben uiteraard een grotere capaciteit dan de dunne. Je kunt de capaciteit van een pijp berekenen met de volgende formule:

$$C = 0{,}02 \cdot D^2$$

Hierin is D de diameter (in mm) en C de capaciteit (in liters/minuut).

Er is nog een voorschrift waarmee rekening gehouden moet worden. Om het regenwater via de dakgoot snel genoeg af te kunnen voeren, zijn er eisen aan het minimale aantal regenpijpen:

- Bij gebruik van dunne pijpen geldt: voor elke 10 m dakgoot moet minimaal één pijp worden aangesloten.
- Bij gebruik van dikke pijpen geldt: voor elke 20 m dakgoot moet minimaal één pijp worden aangesloten.

Pietersma houdt zich aan de genoemde voorschriften en wil regenpijpen kiezen die zorgen voor de laagste kosten: ofwel allemaal dunne ofwel allemaal dikke.

9p **22** Onderzoek welk type pijp Pietersma dan moet kiezen: het dunne type of het dikke type.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.